

# Cuprins

Prefață	xi
1 Preliminarii de analiză funcțională	1
2 Sisteme de ecuații liniare	9
2.1 Preliminarii	9
2.1.1 Norme matriceale	16
2.1.2 Descompunerea valorilor singulare	23
2.1.3 Stabilitatea sistemelor de ecuații liniare	26
2.2 Metode directe	34
2.2.1 Metoda lui Gauss	34
2.2.1.1 Metoda lui Gauss cu pivotare parțială	36
2.2.1.2 Metoda lui Gauss cu pivotare totală	38
2.2.2 Metoda Gauss-Jordan	41
2.2.3 Descompunerea LU	46
2.2.4 Descompunerea Cholesky	50
2.2.5 Descompunerea QR	53
2.2.6 Metoda direcțiilor conjugate	60
2.2.7 Metoda gradientului conjugat	65
2.3 Metode iterative staționare	74
2.3.1 Definierea și convergența metodelor staționare	74
2.3.2 Metoda lui Jacobi	79
2.3.2.1 Metoda Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe linii	79
2.3.2.2 Metoda lui Jacobi pentru matrice diagonal dominante pe coloane	80
2.3.3 Metoda Gauss-Seidel	81
2.3.3.1 Metoda Gauss-Seidel pentru matrice simetrice și pozitiv definite	83
2.3.3.2 Metoda Gauss-Seidel simetrică	84
2.3.4 Metoda Jacobi relaxată	87
2.3.4.1 Metoda relaxării simultane	89
2.3.5 Metoda Gauss-Seidel relaxată (metoda relaxării succesive)	90
2.3.5.1 Metoda relaxării succesive simetrică (SSOR)	97

2.3.6	Metoda Richardson . . . . .	100
2.4	Metode iterative nestaționare . . . . .	101
2.4.1	Metoda celei mai rapide coborâri . . . . .	102
2.4.2	Metoda iterațiilor Cebâsev . . . . .	106
2.4.3	Metoda gradientului conjugat . . . . .	109
2.4.4	Metoda ecuației normale . . . . .	121
2.4.5	Metoda reziduului normal . . . . .	122
2.4.6	Metoda reziduului conjugat . . . . .	124
2.4.7	Metoda orthomin . . . . .	125
2.4.8	Metoda reziduului minim generalizat . . . . .	128
2.4.9	Metoda reziduului minim . . . . .	139
2.4.10	Metoda Lanczos simetrică . . . . .	142
2.4.11	Metoda Lanczos nesimetrică . . . . .	145
2.4.12	Metoda gradientilor biconjugati . . . . .	147
2.4.13	Metoda reziduului cvasi-minim . . . . .	154
2.4.14	Metoda gradientului conjugat pătratic . . . . .	157
2.4.15	Metoda gradientului biconjugat stabilizat . . . . .	161
2.4.16	Metoda reziduului cvasi-minim fără transpunere . . . . .	163
2.4.17	Metoda reducerii dimensiunii induse . . . . .	166
2.5	Precondiționarea sistemelor de ecuații liniare . . . . .	171
2.5.1	Precondiționare diagonală . . . . .	172
2.5.2	Precondiționarea polinomială . . . . .	172
2.5.3	Precondiționarea SSOR . . . . .	174
2.6	Metode pentru aproximarea inversei unei matrice . . . . .	178
2.6.1	Metoda Gauss-Jordan . . . . .	178
2.6.2	Metodă bazată pe descompunerea LU . . . . .	179
2.6.3	Metoda lui Ritz . . . . .	180
2.6.4	Metoda Leverrier-Fadeev . . . . .	182
2.6.5	Metoda lui Schultz . . . . .	185
2.7	Exerciții . . . . .	186
<b>3</b>	<b>Problema liniară a celor mai mici pătrate</b> . . . . .	<b>191</b>
3.1	Preliminarii . . . . .	191
3.2	Pseudoinversa unei matrice . . . . .	194
3.2.1	Metoda lui Greville . . . . .	200
3.2.2	Metoda Fadeev-Decell . . . . .	203
3.2.3	Algoritm de tip Gram-Schmidt . . . . .	206
3.2.4	Algoritmul lui Gh. Grigore . . . . .	210
3.2.5	O metodă directă . . . . .	214
3.2.6	Metode iterative . . . . .	217
3.2.7	Metode pentru determinarea rangului unei matrice . . . . .	222
3.3	Metoda QR . . . . .	224
3.4	Metoda gradientului conjugat . . . . .	225
3.5	Metodă iterativă . . . . .	229
3.6	Exerciții . . . . .	231

<b>4</b>	<b>Valori proprii</b>	<b>233</b>
4.1	Preliminarii	233
4.2	Metoda rotațiilor	236
4.3	Metoda puterii	241
4.4	Metoda Givens	245
4.5	Metoda LU	248
4.6	Metoda QR	250
4.7	Metoda proiecțiilor ortogonale	253
4.8	Metoda Arnoldi	260
4.9	Metoda Lanczos	262
4.10	Exerciții	265
<b>5</b>	<b>Ecuatii și sisteme neliniare</b>	<b>267</b>
5.1	Ecuatii neliniare	267
5.1.1	Ecuatii algebrice	268
5.1.2	Metoda bisecției	270
5.1.3	Metoda falsei poziții	273
5.1.4	Metoda coardei	275
5.1.5	Metoda secantei	277
5.1.6	Metoda lui Newton	280
5.1.7	Metoda contracției	283
5.1.8	Metode iterative de tip interpolator	287
5.1.8.1	Metode iterative cu interpolare inversă	288
5.1.8.2	Metode iterative cu interpolare directă	294
5.1.9	Metoda lui Aitken de accelerare a convergenței	299
5.2	Sisteme neliniare	302
5.2.1	Preliminarii	302
5.2.2	Metoda contracției	304
5.2.3	Metoda Gauss-Seidel neliniară	307
5.2.4	Funcții strict monotone și lipschitziene	309
5.2.5	Metoda lui Newton	312
5.2.6	Metoda lui Newton simplificată	321
5.2.7	Metoda lui Broyden	325
5.2.8	Metoda Newton inexactă	328
5.2.9	Metoda Newton-Krâlov cu diferențe finite	334
5.3	Exerciții	340
<b>6</b>	<b>Interpolare</b>	<b>343</b>
6.1	Preliminarii	343
6.2	Interpolarea polinomială Lagrange	345
6.2.1	Formula lui Lagrange	346
6.2.2	Formula lui Newton	350
6.2.3	Evaluarea erorii de aproximare	355
6.2.4	Interpolarea cu noduri Cebâșev	360
6.2.5	Formule de interpolare cu puncte echidistante	361

6.3	Interpolarea polinomială Hermite . . . . .	372
6.3.1	Formula lui Hermite . . . . .	375
6.3.2	Formula lui Newton . . . . .	377
6.3.3	Polinomul de interpolare Fejer-Hermite . . . . .	383
6.3.4	Evaluarea erorii de aproximare . . . . .	384
6.4	Interpolarea polinomială trigonometrică . . . . .	386
6.5	Interpolarea cu funcții spline . . . . .	394
6.5.1	Interpolarea cu funcții spline liniare . . . . .	394
6.5.2	Interpolarea cu funcții spline cubice . . . . .	396
6.6	Aproximarea funcțiilor prin polinoame . . . . .	402
6.6.1	Aproximarea uniformă a funcțiilor cu ajutorul polinoamelor . . . . .	403
6.6.2	Cea mai bună aproximare uniformă . . . . .	416
6.6.3	Aproximare în sensul celor mai mici pătrate. Polinoame ortogonale . . . . .	426
6.6.3.1	Polinoamele Legendre . . . . .	434
6.6.3.2	Polinoamele Cebâșev de primul tip . . . . .	436
6.6.3.3	Polinoamele Cebâșev de al doilea tip . . . . .	439
6.6.3.4	Polinoamele Jacobi . . . . .	442
6.6.3.5	Polinoamele Laguerre . . . . .	443
6.6.3.6	Polinoamele Hermite . . . . .	445
6.7	Convergența procesului de interpolare . . . . .	447
6.8	Exerciții . . . . .	458
<b>7</b>	<b>Derivare numerică . . . . .</b>	<b>461</b>
7.1	Preliminarii . . . . .	461
7.2	Aproximarea derivatei de ordinul 1 . . . . .	464
7.3	Aproximarea derivatelor de ordin superior . . . . .	470
7.4	Exerciții . . . . .	476
<b>8</b>	<b>Integrare numerică . . . . .</b>	<b>477</b>
8.1	Preliminarii . . . . .	477
8.2	Formule de cuadratură de tip interpolator . . . . .	481
8.3	Formulele de cuadratură Newton-Cotes . . . . .	483
8.3.1	Formule închise . . . . .	483
8.3.1.1	Formula de cuadratură a trapezului . . . . .	493
8.3.1.2	Formula de cuadratură Simpson . . . . .	494
8.3.1.3	Formula de cuadratură Newton . . . . .	496
8.3.1.4	Formula de cuadratură Boole . . . . .	498
8.3.2	Formule deschise . . . . .	499
8.3.2.1	Formula de cuadratură a dreptunghiului . . . . .	506
8.3.2.2	Formula de cuadratură Newton-Cotes deschisă pentru $n = 2$ . . . . .	508
8.3.2.3	Formula de cuadratură Milne . . . . .	509
8.3.2.4	Formula de cuadratură Newton-Cotes deschisă pentru $n = 4$ . . . . .	511

8.4	Formula de cuadratură Hermite . . . . .	513
8.5	Formula de cuadratură Euler-MacLaurin . . . . .	515
8.6	Formule de cuadratură obținute prin integrarea funcțiilor spline . . .	520
8.7	Formule de cuadratură de tip Gauss . . . . .	521
8.7.1	Formula de cuadratură Gauss-Legendre . . . . .	526
8.7.2	Formula de cuadratură Gauss-Cebâșev de primul tip . . . . .	528
8.7.3	Formula de cuadratură Gauss-Cebâșev de al doilea tip . . . . .	530
8.7.4	Formula de cuadratură Gauss-Jacobi . . . . .	531
8.7.5	Formula de cuadratură Gauss-Laguerre . . . . .	532
8.7.6	Formula de cuadratură Gauss-Hermite . . . . .	534
8.8	Formule de cuadratură cu puncte prestabilite . . . . .	535
8.8.1	Formula de cuadratură Radau . . . . .	537
8.8.2	Formula de cuadratură Lobatto . . . . .	539
8.9	Convergența formulelor de cuadratură . . . . .	541
8.10	Metoda lui Romberg . . . . .	546
8.11	Exerciții . . . . .	553
<b>9</b>	<b>Ecuatii diferențiale . . . . .</b>	<b>555</b>
9.1	Preliminarii . . . . .	555
9.2	Metode de tip Runge-Kutta . . . . .	556
9.2.1	Consistență, stabilitate convergență . . . . .	556
9.2.2	Construcția metodelor . . . . .	563
9.2.3	Metoda Euler . . . . .	568
9.2.4	Metoda Euler ameliorată . . . . .	569
9.2.5	Metoda Heun (Euler-Cauchy) . . . . .	571
9.2.6	Metoda Runge-Kutta . . . . .	572
9.3	Metode de tip Adams . . . . .	577
9.3.1	Consistență, stabilitate, convergență . . . . .	577
9.3.2	Construcția metodelor . . . . .	585
9.3.3	Metoda Adams-Bashforth . . . . .	587
9.3.4	Metoda Adams-Moulton . . . . .	590
9.3.5	Metoda predictor-corector . . . . .	592
9.4	Exerciții . . . . .	593
	<b>Bibliografie . . . . .</b>	<b>595</b>
	<b>Index . . . . .</b>	<b>604</b>